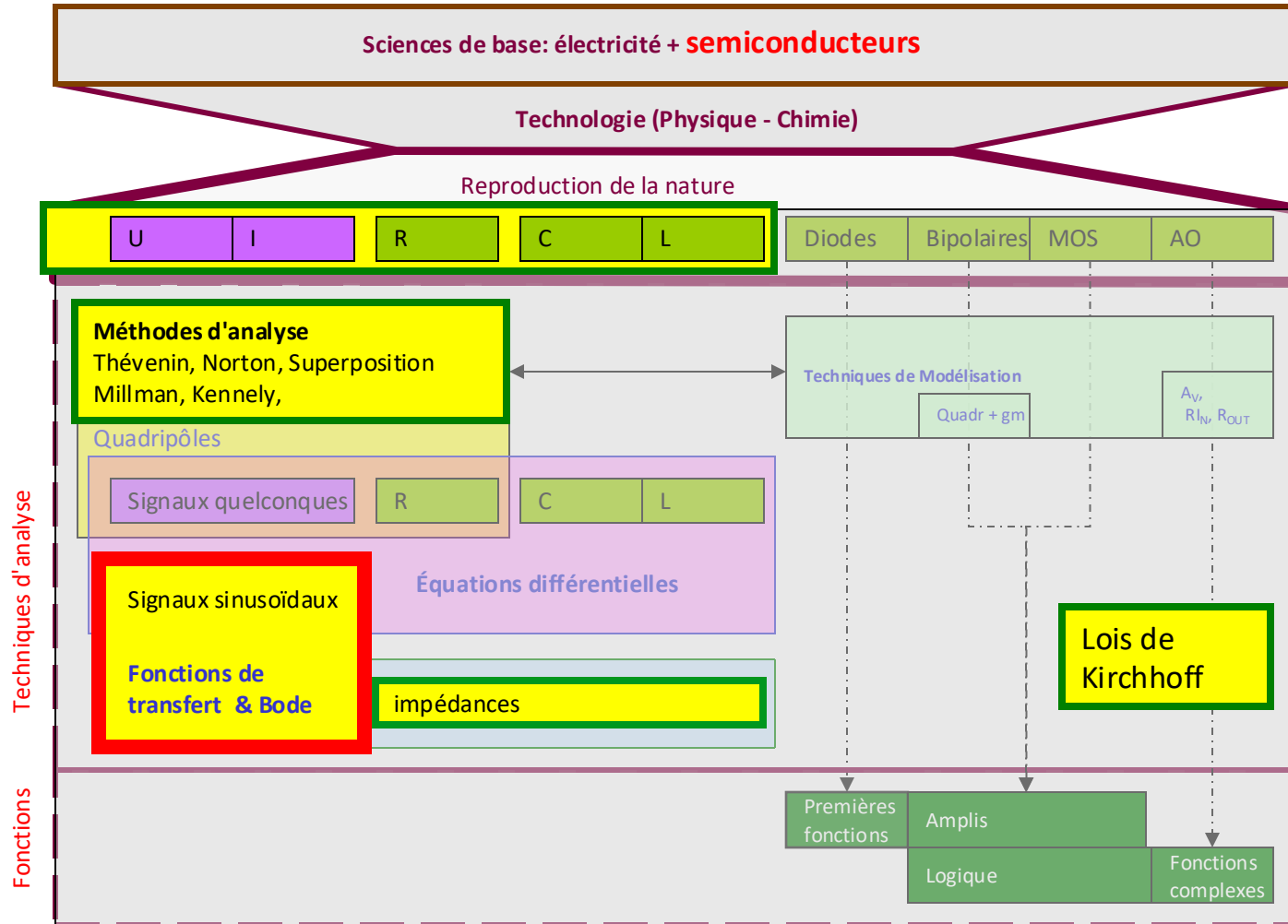


Relations entre les différentes notions



Objectifs de la séance

Rappel : différence essentielle entre diviseur de tension résistif et fonction de transfert

Écriture des fonctions de transfert avec combinaison de termes du premier ordre (Forme canonique)

- **Cinq termes du premier ordre**

$$\underline{H}(j\omega) = K \cdot \frac{j \frac{\omega}{\omega_{Z1}} \cdot \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_{Z2}}\right) \cdot \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_{Z3}}\right) \dots \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_{Zk}}\right)}{j \frac{\omega}{\omega_{P1}} \cdot \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_{P2}}\right) \cdot \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_{P3}}\right) \dots \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_{Pl}}\right)}$$

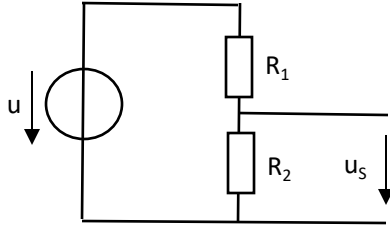
notation libre, mais doit permettre de différencier les pulsations

- **K** est une constante, ω_{zi} ($i=1,k$) **zéro**, ω_{pi} ($i=1,l$) **pôle**

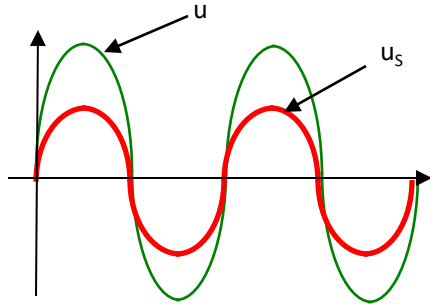
Dessiner le module et l'argument de la fonction de transfert :

- Le dessin du module $|\underline{H}(j\omega)|$ exprimé en **dB** (décibels) : **échelle linéaire**.
- Le dessin de l'argument $\text{Arg}(\underline{H}(j\omega))$ exprimé en **radians** ou **degrés** : **échelle linéaire**
- Dans les deux cas, l'axe des pulsations est représenté sur une **échelle logarithmique**.

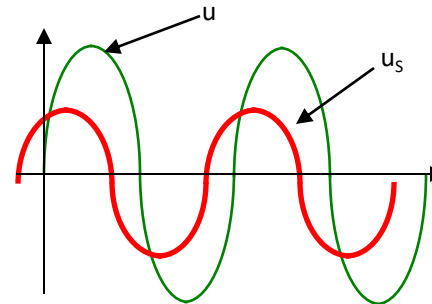
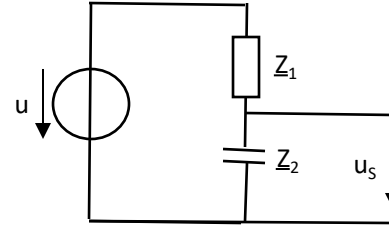
Rappel différence essentielle entre R et Z



$$\frac{u_s}{u} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$



Le rapport est une **valeur**



$$\frac{u_s}{u} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

Le rapport est une fonction notée $\underline{H}(j\omega)$
 $\underline{H}(j\omega)$ est appelé **fonction de transfert**

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

Module

Argument

Conséquence pour représenter des produits de termes de base

1. Les fonctions de transfert s'expriment à partir d'un **produit de termes de bases**
2. Exploitation d'une échelle logarithmique pour l'axe des **modules** : $\text{Log}(A.B) = \text{Log}(A) + \text{Log}(B)$
 - Si A et B sont complexes : $|A.B| = |A|.|B|$ et $\text{Log}(|A.B|) = \text{Log}|A| + \text{Log}|B|$
3. Quels sont les termes de bases du premier ordre et pourquoi les modules calculés en **dB**?

$$|K|_{dB} = 20.\log(K)$$

$$\left| j \frac{\omega}{\omega_{Z1}} \right|_{dB} = 20.\log \left| j \frac{\omega}{\omega_{Z1}} \right| = 20.\log \left(\frac{\omega}{\omega_{Z1}} \right)$$

$$\left| 1 + j \frac{\omega}{\omega_{Z2}} \right|_{dB} = 20.\log \left| 1 + j \frac{\omega}{\omega_{Z2}} \right| = 20.\log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{Z2}} \right)^2}$$

$$\frac{1}{\left| j \frac{\omega}{\omega_{P1}} \right|_{dB}} = 20.\log \frac{1}{\left| j \frac{\omega}{\omega_{P1}} \right|} = 20.\log \frac{1}{\left(\frac{\omega}{\omega_{P1}} \right)} = -20.\log \left(\frac{\omega}{\omega_{P1}} \right)$$

$$\frac{1}{\left| 1 + j \frac{\omega}{\omega_{P2}} \right|_{dB}} = 20.\log \frac{1}{\left| 1 + j \frac{\omega}{\omega_{P2}} \right|} = 20.\log \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{P2}} \right)^2}} = -20.\log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{P2}} \right)^2}$$

$$\left| \frac{P_2}{P_1} \right|_{dB} = 10.\log \left(\frac{P_2}{P_1} \right)$$

dB?

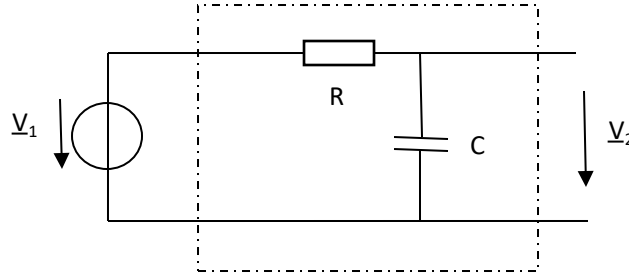
$$10.\log \left(\frac{U_2^2/R}{U_1^2/R} \right) = 10.\log \left(\frac{U_2^2}{U_1^2} \right) = 10.\log \left(\frac{U_2}{U_1} \right)^2$$

$$\left| \frac{U_2}{U_1} \right|_{dB} = \mathbf{20}.\log \left(\frac{U_2}{U_1} \right)$$

log en base 10

L'exemple le plus simple:

Réponse en fréquence du circuit "passe-bas"



$$\underline{H}(j\omega) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \quad \text{Avec } \omega_0 = 1/RC = 1/\tau$$

Module :

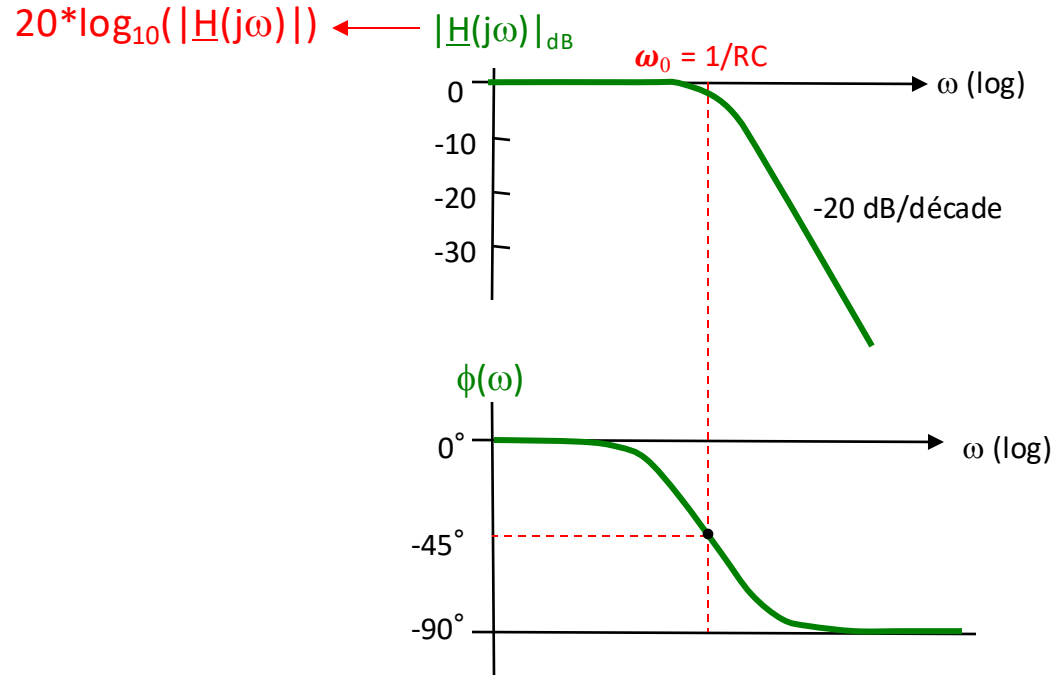
$$|\underline{H}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

Argument:

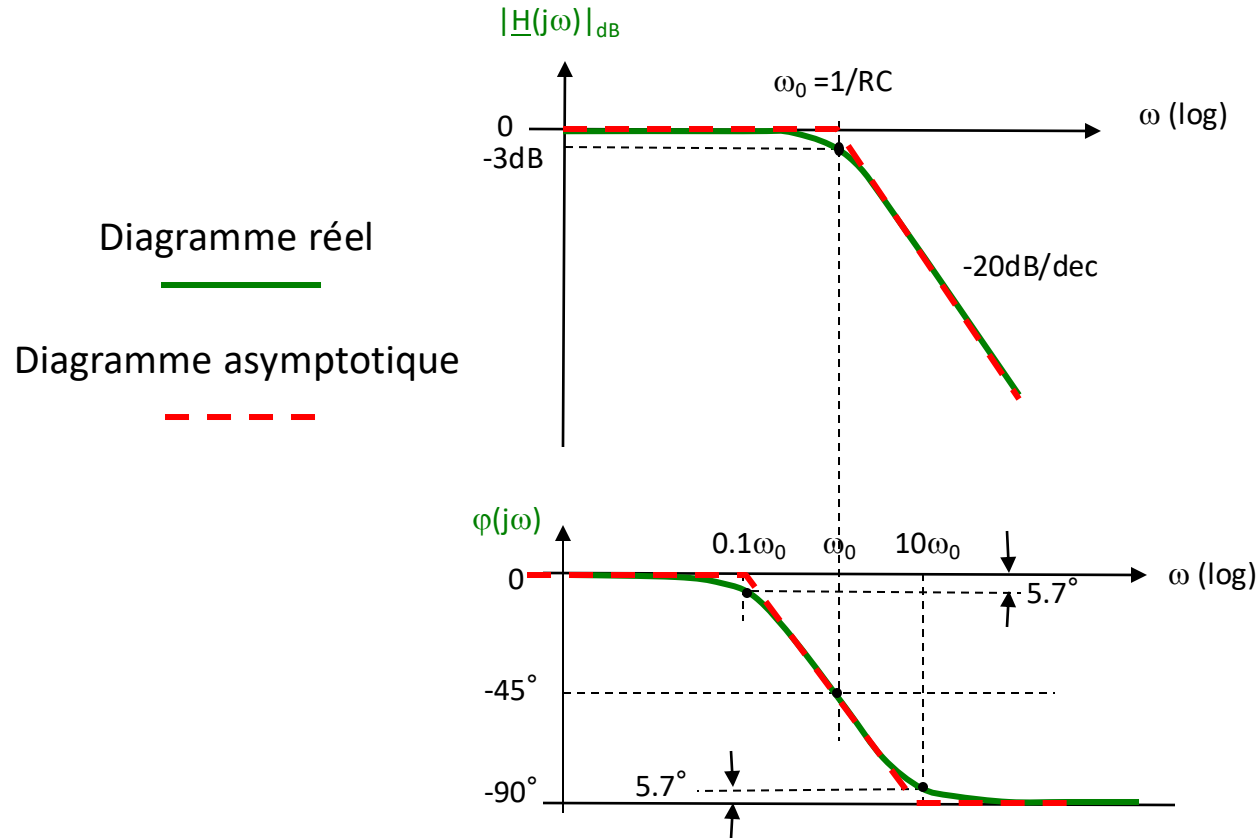
$$\text{Arg}(\underline{H}(j\omega)) = -\text{arctg} \frac{\omega}{\omega_0}$$

Réponse en fréquence du filtre passe-bas

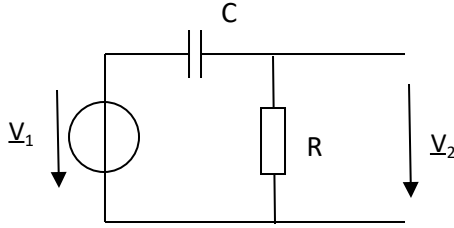
Recherche des asymptotes et **cas particulier**



Approximation asymptotique



Circuit RC passe-haut



$$\underline{H}(j\omega) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} = \frac{j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$$

Module :

$$|\underline{H}(j\omega)| = \frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

Argument:

$$\text{Arg}\left(\underline{H}(j\omega)\right) = \frac{\pi}{2} - \text{arctg} \frac{\omega}{\omega_0}$$

Autre représentation que l'on trouve dans la littérature (difficile à exploiter)

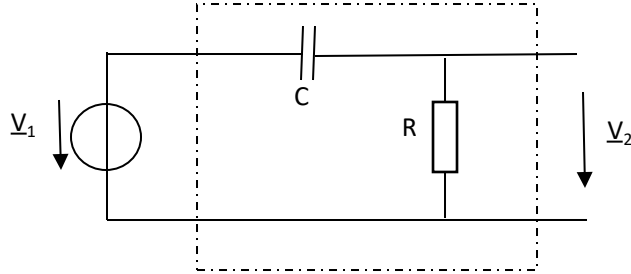
Module :

$$|\underline{H}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

Argument:

$$\text{Arg}\left(\underline{H}(j\omega)\right) = \text{arctg} \frac{\omega_0}{\omega}$$

Réponse en fréquence asymptotique du filtre passe-haut



Asymptotes { 1/ pour $\omega \ll \omega_0$ $\underline{H}(j\omega) = j \frac{\omega}{\omega_0}$
2/ pour $\omega \gg \omega_0$ $\underline{H}(j\omega) = 1$

Cas particulier 3/ pour $\omega = \omega_0$ $\underline{H}(j\omega) = \frac{j}{1+j}$

$$|\underline{H}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \text{Arg}(\underline{H}(j\omega)) = 45^\circ$$

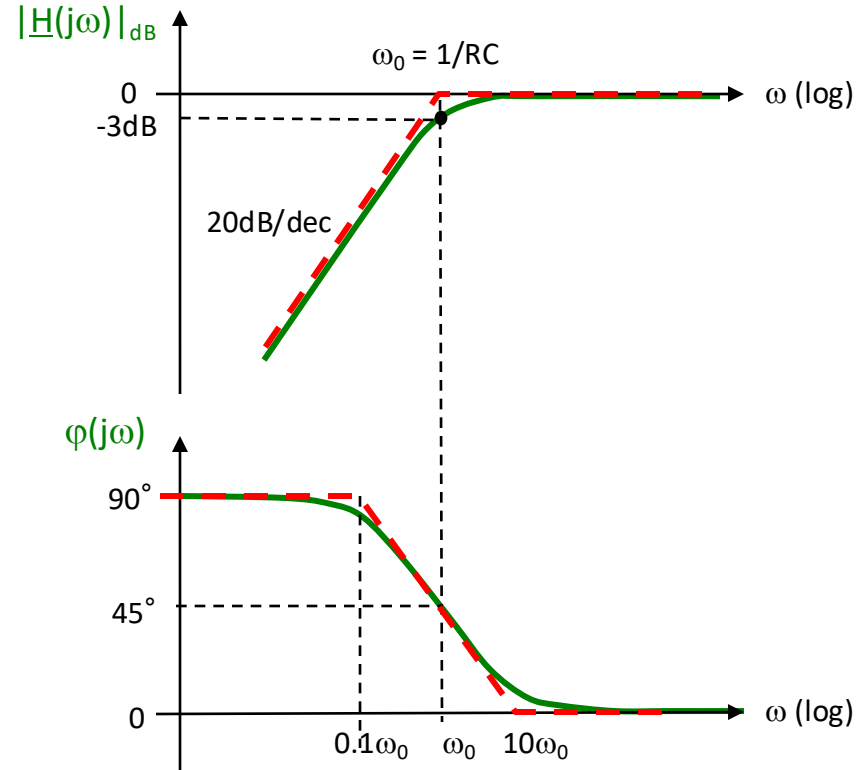


Diagramme de Bode - Module

Propriété : **Le module d'un produit est égal au produit des modules,**
or, le log d'un produit est égal à une somme de log

Si $\underline{H}(j\omega) = \underline{H}_1(j\omega) \cdot \underline{H}_2(j\omega)$ Alors $|\underline{H}(j\omega)|_{dB} = |\underline{H}_1(j\omega)|_{dB} + |\underline{H}_2(j\omega)|_{dB}$

D'où, l'intérêt de mettre une fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$ sous la forme:

$$\underline{H}(j\omega) = K \cdot \frac{j \frac{\omega}{\omega_{Z1}} \cdot \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_{Z2}}\right) \cdot \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_{Z3}}\right) \dots \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_{Zk}}\right)}{j \frac{\omega}{\omega_{P1}} \cdot \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_{P2}}\right) \cdot \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_{P3}}\right) \dots \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_{Pl}}\right)}$$

Son module exprimé en dB s'exprime comme une somme de modules élémentaires exprimés eux aussi en dB:

$$|\underline{H}(j\omega)|_{dB} = |K|_{dB} + \left| j \frac{\omega}{\omega_{Z1}} \right|_{dB} + \left| 1 + j \frac{\omega}{\omega_{Z2}} \right|_{dB} + \dots + \left| 1 + j \frac{\omega}{\omega_{Zl}} \right|_{dB} + \left| \frac{1}{j \frac{\omega}{\omega_{P1}}} \right|_{dB} + \dots + \left| \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_{Pl}}} \right|_{dB}$$

BUT : faciliter le tracé du diagramme de Bode

Diagramme de Bode - module de quelques fonctions élémentaires [1]

$$H(j\omega) = K = \text{constante}$$

Si $|K| > 1$, alors $|K|_{\text{dB}} > 0$
Si $|K| < 1$, alors $|K|_{\text{dB}} < 0$

Le choix de la pulsation est arbitraire mais doit faciliter la représentation du domaine étudié

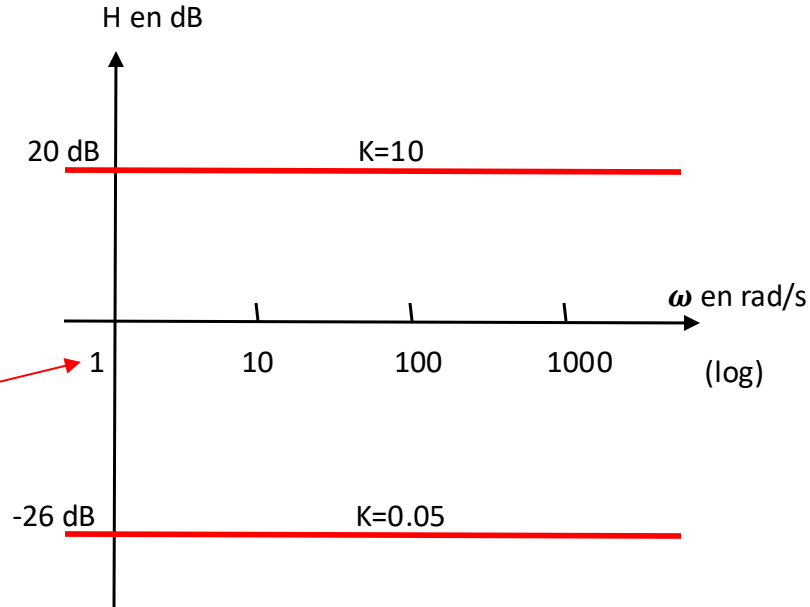


Diagramme de Bode (module) de $H(j\omega) = K$

Diagramme de Bode - module

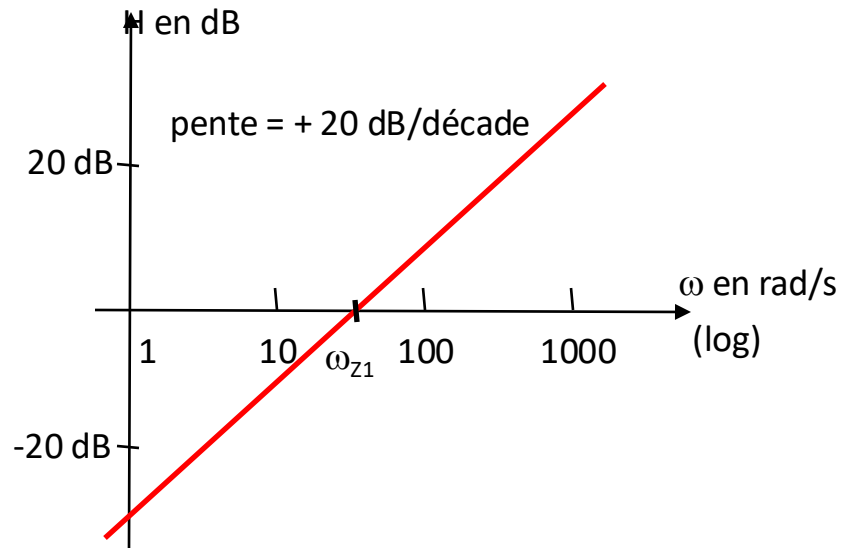
$$|H(j\omega)|_{dB} = 20 \cdot \log |H(j\omega)|$$

Exemples de calcul pour
quelques constantes:

$ H(j\omega) = 1$	$ H(j\omega) _{dB} = 0 \text{ dB}$
$ H(j\omega) = 10$	$ H(j\omega) _{dB} = 20 \text{ dB}$
$ H(j\omega) = 100$	$ H(j\omega) _{dB} = 40 \text{ dB}$
$ H(j\omega) = 1000$	$ H(j\omega) _{dB} = 60 \text{ dB}$
$ H(j\omega) = 0.1$	$ H(j\omega) _{dB} = -20 \text{ dB}$
$ H(j\omega) = 0.01$	$ H(j\omega) _{dB} = -40 \text{ dB}$
$ H(j\omega) = 0.001$	$ H(j\omega) _{dB} = -60 \text{ dB}$
$ H(j\omega) = 2$	$ H(j\omega) _{dB} = 6 \text{ dB}$
$ H(j\omega) = 0.5$	$ H(j\omega) _{dB} = -6 \text{ dB}$

Diagramme de Bode - module de quelques fonctions élémentaires [2]

$$\underline{H}(j\omega) = j \frac{\omega}{\omega_{Z1}}$$



$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{j \frac{\omega}{\omega_{P1}}}$$

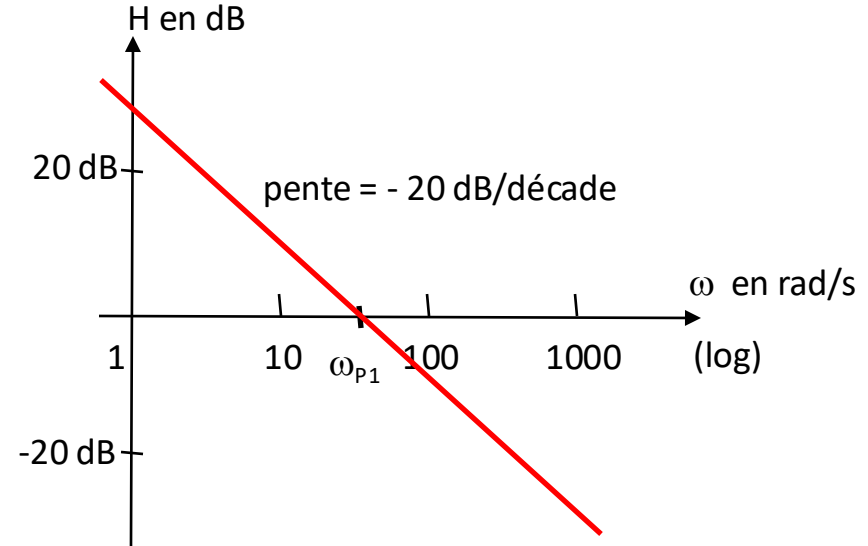


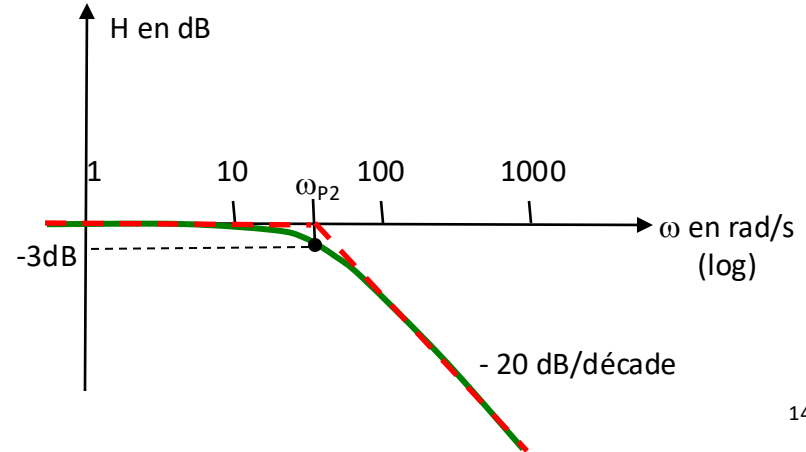
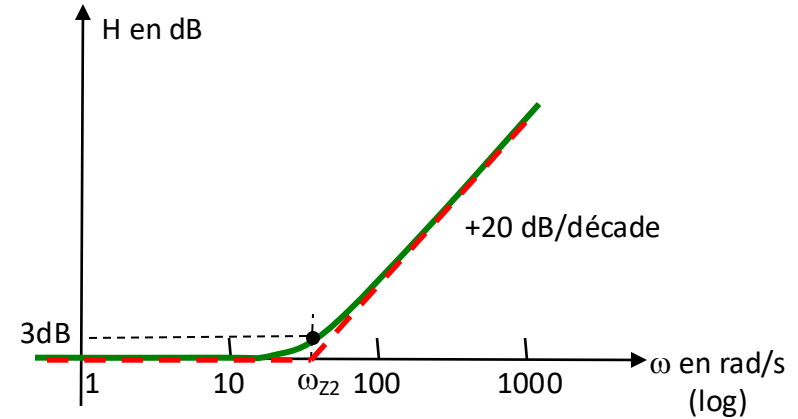
Diagramme de Bode - module de quelques fonctions élémentaires [3]

$$\underline{H}(j\omega) = 1 + j \frac{\omega}{\omega_{Z2}} \text{ et } |\underline{H}(j\omega)| = \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{Z2}}\right)^2}$$

- Comportement à **basses fréquences** identique à une constante de valeur **1** soit **|H| = 0 dB**
- Comportement à **hautes fréquences** identique au terme $j \frac{\omega}{\omega_{Z2}}$ soit **|H| = 20 dB/dec**

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_{P2}}} \text{ et } |\underline{H}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{P2}}\right)^2}}$$

- Comportement à **basses fréquences** identique à une constante de valeur **1** soit **|H| = 0 dB**
- Comportement à **hautes fréquences** identique au terme $\frac{1}{j \frac{\omega}{\omega_{P2}}}$ soit **|H| = -20 dB/dec**



Exemple de diagramme de Bode - module

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{j \frac{\omega}{\omega_2}}{\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_1}\right) \cdot \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_2}\right)}$$

Avec $\omega_2 = 10^2 \text{ rad/s}$

et $\omega_1 = 10^3 \text{ rad/s}$

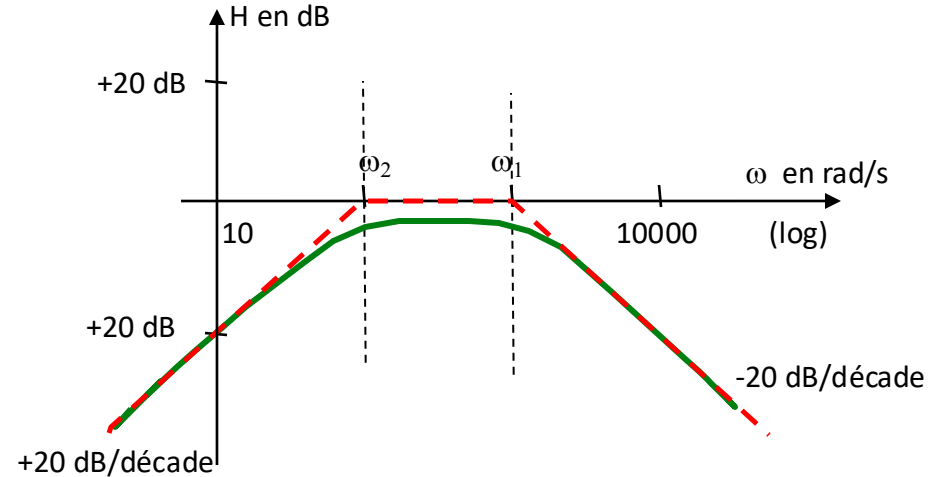
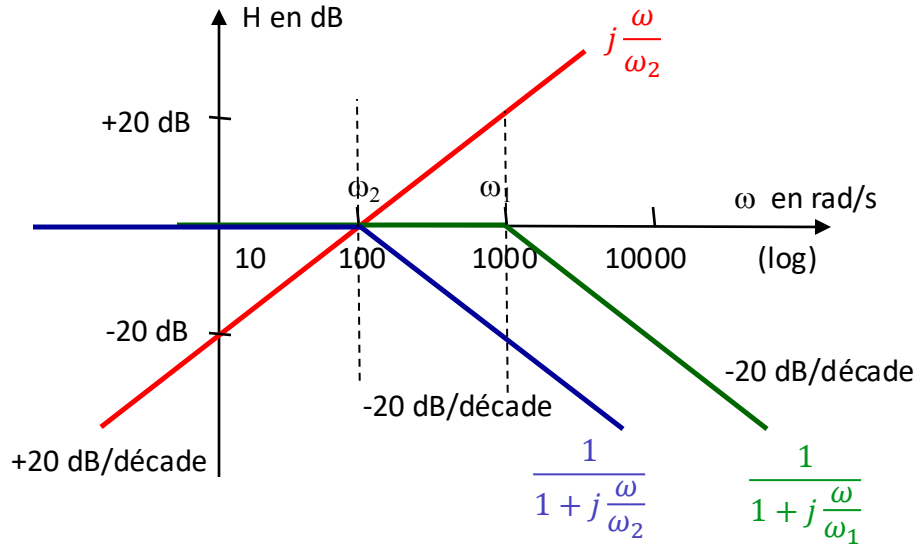


Diagramme de Bode - argument ou phase

La phase $\text{Arg}(\underline{H}(j\omega))$ est exprimée en radians à 2π près

Propriété : **l'argument d'un produit est égal à la somme des arguments**

Si $\underline{H}(j\omega) = \underline{H}_1(j\omega) \cdot \underline{H}_2(j\omega)$ Alors $\text{Arg}(\underline{H}(j\omega)) = \text{Arg}(\underline{H}_1(j\omega)) + \text{Arg}(\underline{H}_2(j\omega))$

$$\underline{H}(j\omega) = K \cdot \frac{j \frac{\omega}{\omega_{Z1}} \cdot \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_{Z2}}\right) \cdot \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_{Z3}}\right) \dots \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_{Zk}}\right)}{j \frac{\omega}{\omega_{P1}} \cdot \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_{P2}}\right) \cdot \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_{P3}}\right) \dots \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_{Pl}}\right)}$$

Son argument s'exprime comme une somme (différence) d'arguments élémentaires:

$$\begin{aligned} \text{Arg}(\underline{H}(j\omega)) = & \text{Arg}(K) + \text{Arg}\left(j \frac{\omega}{\omega_{Z1}}\right) + \text{Arg}\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_{Z2}}\right) + \dots + \text{Arg}\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_{Zk}}\right) \\ & - \text{Arg}\left(j \frac{\omega}{\omega_{P1}}\right) - \text{Arg}\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_{P2}}\right) \dots - \text{Arg}\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_{Pl}}\right) \end{aligned}$$

Diagramme de Bode - phase de quelques fonctions élémentaires [1]

$\underline{H}(j\omega) = K = \text{constante}$

$\text{Arg}(K) = 0$ pour $K > 0$

$\text{Arg}(K) = \pi$ ou 180°
pour $K < 0$

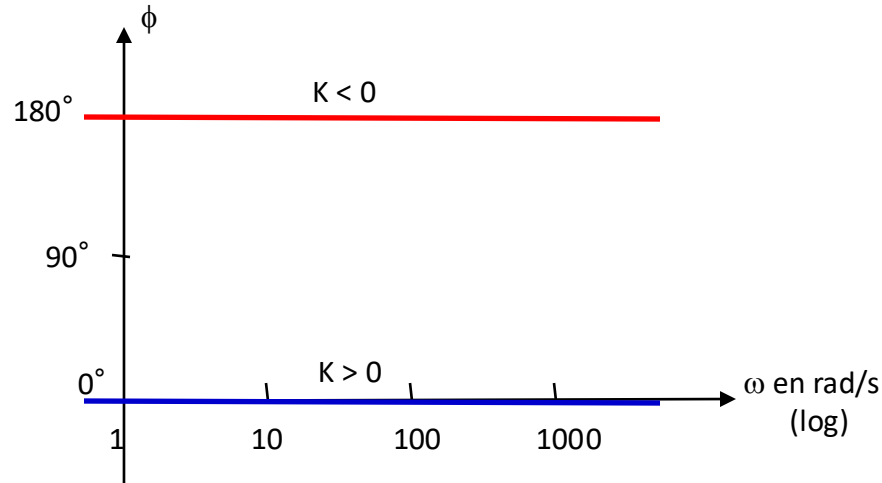
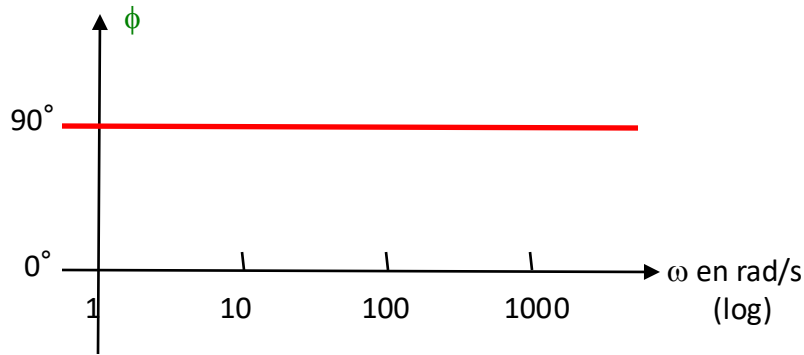


Diagramme de Bode (phase) de $\underline{H}(j\omega) = K$

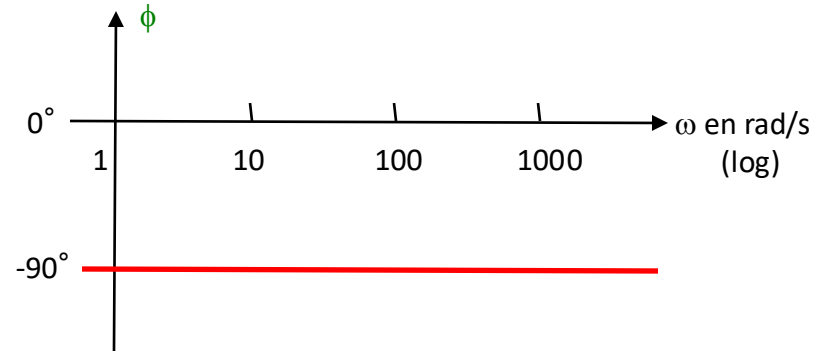
Diagramme de Bode - phase de quelques fonctions élémentaires [2]

$$\underline{H}(j\omega) = j \frac{\omega}{\omega_{z1}}$$



$$\text{Arg}(\underline{H}(j\omega)) = \pi/2 \text{ ou } 90^\circ$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{j \frac{\omega}{\omega_{p1}}}$$

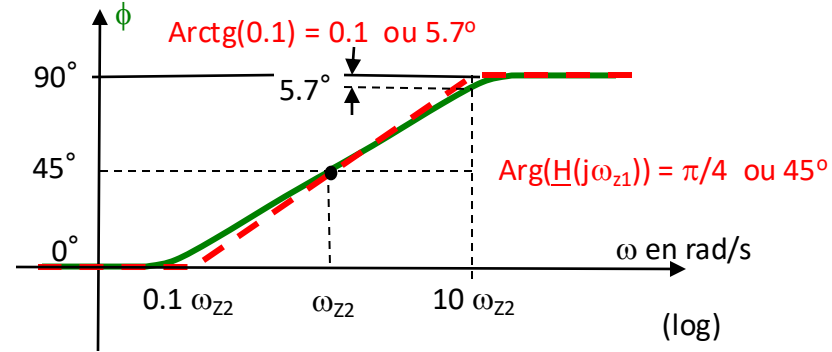


$$\text{Arg}(\underline{H}(j\omega)) = -\pi/2 \text{ ou } -90^\circ$$

Diagramme de Bode - phase de quelques fonctions élémentaires [3]

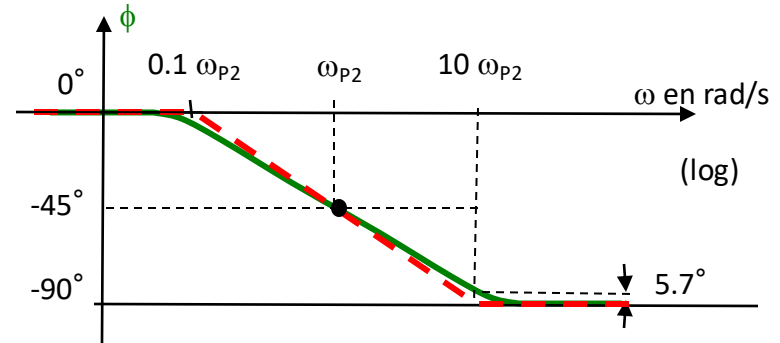
$$\underline{H}(j\omega) = 1 + j \frac{\omega}{\omega_{Z2}}$$

- Comportement à **basses fréquences** identique à une constante de valeur **1** soit $\phi=0$
- Comportement à **hautes fréquences** identique au terme $j \frac{\omega}{\omega_{Z2}}$ soit $\phi=\pi/2$



$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_{P2}}}$$

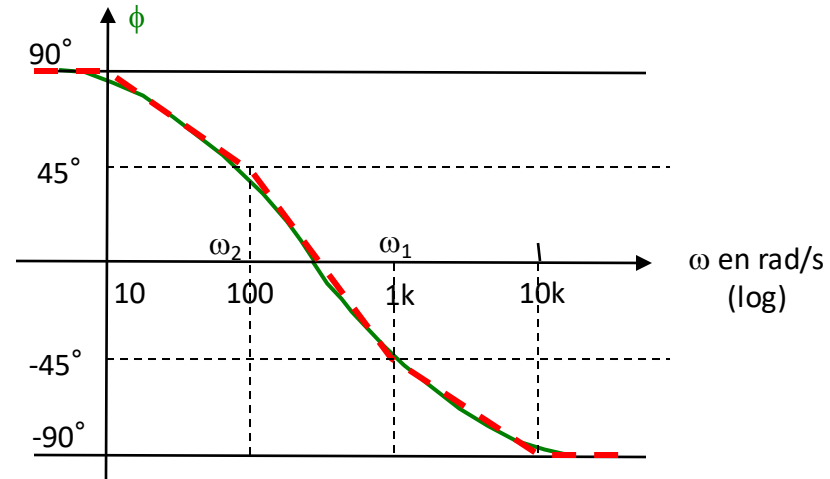
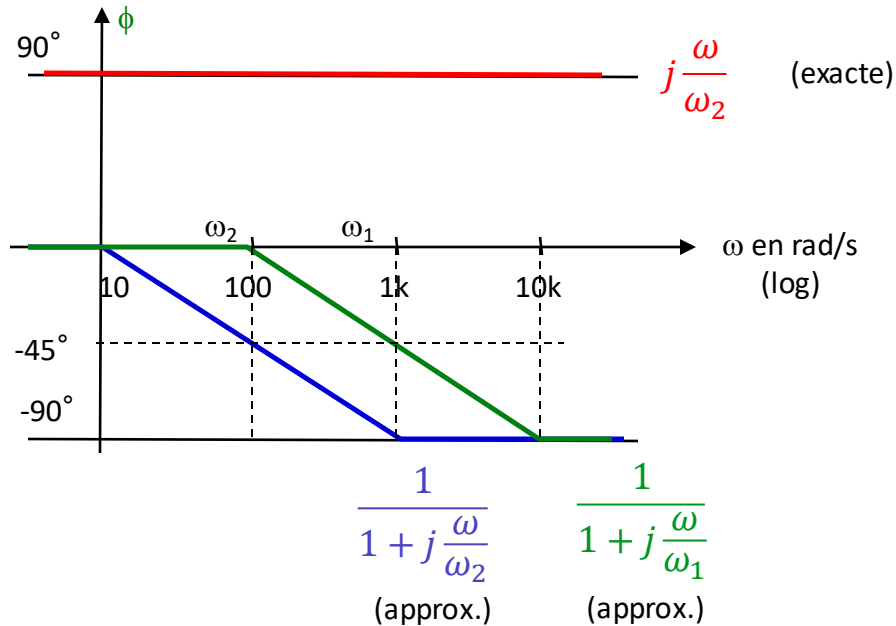
- Comportement à **basses fréquences** identique à une constante de valeur **1** soit $\phi=0$
- Comportement à **hautes fréquences** identique au terme $\frac{1}{j \frac{\omega}{\omega_{P2}}}$ soit $\phi=-\pi/2$



Example

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{j \frac{\omega}{\omega_2}}{\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_1}\right) \cdot \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_2}\right)}$$

Avec $\omega_2 = 10^2 \text{ rad/s}$
et $\omega_1 = 10^3 \text{ rad/s}$



Exemple de feuille lin - log

